



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI



## Olimpiada Națională de Matematică

*Etapa Locală - 17 februarie 2024*

**Clasa a XII-a**

### Subiectul 1

Fie  $G = (5, \infty)$  și operația  $x * y = xy - 5x - 5y + 30$ .

- Demonstrați că operația dată induce pe  $G$  o structură de grup abelian.
- Arătați că, dacă  $H$  este un subgrup al lui  $G$  care conține toate numerele naturale mai mari decât 5, atunci  $H$  conține toate numerele raționale mai mari decât 5.

(\*\*\*)

### Subiectul 2

Demonstrați că

$$\int_0^1 \frac{4xe^x - 2}{(x+1)^2} dx \leq 1.$$

(\*\*\*)

### Subiectul 3

Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu elementul neutru  $e$  și  $H, K$  două subgrupuri proprii ale sale.

Dacă  $x^2 = e$ , pentru orice  $x \in G \setminus (H \cup K)$ , arătați că  $(H \cap K, \cdot)$  este grup comutativ.

*Gazeta Matematică nr. 11/2021*

### Subiectul 4.

Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f$  este injectivă și

$$g(x) = f(x) + \sin f(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că  $f$  admite primitive dacă și numai dacă  $g$  admite primitive.

*Gazeta Matematică nr. 9/2023*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

*Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.*

*Timp de lucru : 3 ore*